PART3 無理式の極限

要点整理と公式

要点① 無理式の極限

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$ について考える。

この極限は，形式的に $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形(不定形)である。

n を限りなく大きくするとき，$\sqrt{n^2+1}$ は実質的に $\sqrt{n^2}=n$，すなわち1次式とみなすことができる。よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}$ と同様に，分母と分子を $\quad$ (>0) で割ることにより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\times\frac{1}{\quad}}{(2n-1)\times\frac{1}{\quad}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+1)\times\frac{1}{\quad}}}{(2n-1)\times\frac{1}{\quad}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\qquad}}{\qquad}=\qquad=\frac{1}{2}$$

といったように，式変形により極限を求めることができる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ について考える。

この極限は，形式的に $\infty-\infty$ の形(不定形)である。

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\qquad}{\qquad}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\qquad$$

といったように，式変形により極限を求めることができる。

不定形の極限を求めるときには，このように「分子の　　　　」が有効な場合がある。

[MEMO]

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

Point Pickup

無理式の極限

形式的に $\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ (不定形)の形となる無理式の極限

→ 分母や分子の有理化や，$n>0$ のとき $n=\sqrt{n^2}$ であることを利用して，式変形により極限が求められる形にする。

第 2 講 PART3 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$ ア

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+1}}=$ イ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

3 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=$ ウ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

4 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=$ エ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

PART3 無理式の極限

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

[解答]

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(n+2)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{3}=\infty$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)\times\frac{1}{n}}{\sqrt{3n^2+1}\times\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)-n}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=0$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$ [A]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

$$=\infty$$

[A]　分母・分子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけ，分母を有理化する。

2

[正解] イ：④

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\times\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}\times\frac{1}{n}}$$ [B]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{2}{1}$$ [C]

$$=2$$

[B]　分母・分子を n で割る。

[C]　$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1$

3　**[正解] ウ：①**

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \quad \text{[D]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\mathbf{0}$$

［D］　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ をかけ，分子を有理化する。

4　**[正解] エ：②**

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} \quad \text{[E]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \quad \text{[F]}$$

$$=\frac{2}{1+1}$$

$$=\mathbf{1}$$

［E］　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{n^2+2n}+n$ をかけ，分子を有理化する。

［F］　分母・分子を n で割る。